الفصل الثالث: النواقل الكهربائية في حالة التوازن

I- النواقل والعوازل:

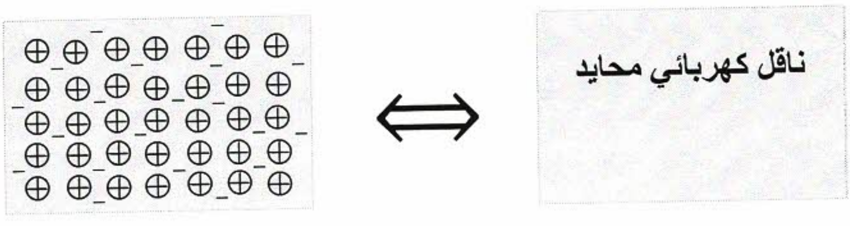
نعرف أن المادة مكونة من شحن موجبة ممثلة بالبروتونات الموجودة في النواة المتمركزة داخل الذرات وشحن سالبة ممثلة بالإلكترونات التي تشكل ما يعرف بالسحابة الإلكترونية حول النواة والتي يحدد امتدادها في الفضاء مقاس كل صنف من الذرات.

نعرف أيضا أن الإلكترونات يمكن تقسيمها إلى صنفين:

- إلكترونات المدارات الداخلية الشديدة الارتباط بالذرات.
- إلكترونات المدارات الخارجية التي يمكن أن تنتقل من ذرة إلى أخرى عن طريق تشكيل الروابط الكيميائية التي بدورها تؤدي إلى تكوين الجزيئات أو المادة الصلبة.

1- العوازل الكهربائية: في المواد العازلة (لا تنقل الكهرباء)، إلكترونات المدارات الخارجية تشكل روابط كيميائية تكافئية أو أيونية أو على العموم مختلطة تكافئية-أيونية. في مثل هذه الروابط، الإلكترونات المكونة لها لا تبتعد أبدا عن الذرات الصادرة عنها وأقصى حد تصل إليه هي الذرات المجاورة مباشرة للذرة الأصلية. فكل إلكترون يبقى في موقع ضيق جدا من الفضاء بحيث لا يؤدي لأي ناقلية كهربائية.

2- النواقل الكهربائية: في النواقل (الموصلات) الكهربائية الممثلة في الغالب بالمعادن، الإلكترونات التي تحقق الترابط بين الذرات (الرابطة المعدنية) أو على الأقل جزء منها هي حرة في الانتقال بين الذرات داخل المادة وتسمى **"الإلكترونات الحرة"**. يمكن إذن تمثيل معدن (ناقل كهربائي) بشبكة أيونية موجبة عائمة داخل غاز من الإلكترونات الحرة.



في حالة عدم وجود أي تأثير خارجي يكون المعدن في حالة حياد كهربائي ($Q = 0$) لأن متوسط الشحنات الموجبة والسالبة متكافئ محليا. على العموم، نعرف الناقل الكهربائي " **بجسم (وسط) يمكن أن تتحرك شحن كهربائية داخله تحت تأثير قوة مهما كانت ضعيفة** "

II- خواص ناقل كهربائي وحيد في حالة توازن كهرساكن:

تعريف: " نقول أن ناقلا كهربائيا قد بلغ حالة التوازن الكهرساكن عندما **تتوقف الحركة المنظمة للشحن الحرة** داخل الناقل ".

يمكن شرح خواص النواقل الكهربائية في حالة توازن باعتبار أن حركة الإلكترونات الحرة داخلها تتم بسهولة ولكن من دون أن تغادر المادة عبر السطح الخارجي للناقل. هذه الخواص نقدمها مختصرة فيما يلي.

1- الحقل الكهربائي داخل ناقل في حالة توازن: عند وجود حقل كهربائي $\vec{E}$ داخل الناقل، كل إلكترون يصير خاضعا لقوة كهربائية $\vec{F} = -e\,\vec{E}$ مما يؤدي إلى حدوث حركة جماعية منظمة للإلكترونات الحرة (تيار كهربائي مؤقت) وتتوقف هذه الحركة عندما يصير الناقل في حالة توازن، أي $\vec{E} = \vec{0}$. إذن: " **الحقل الكهربائي داخل ناقل في حالة توازن معدوم، ونكتب:** $\vec{E}_{int} = \vec{0}$ ".

2- الكمون الكهربائي داخل ناقل: بما أن الحقل الكهربائي داخل ناقل في حالة توازن معدوم فإن الكمون الكهربائي داخل الناقل ثابت. نستنتج ذلك من العلاقة العامة $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ ($\vec{E}_{int} = \vec{0} \Rightarrow V_{int} = V = V_0$).

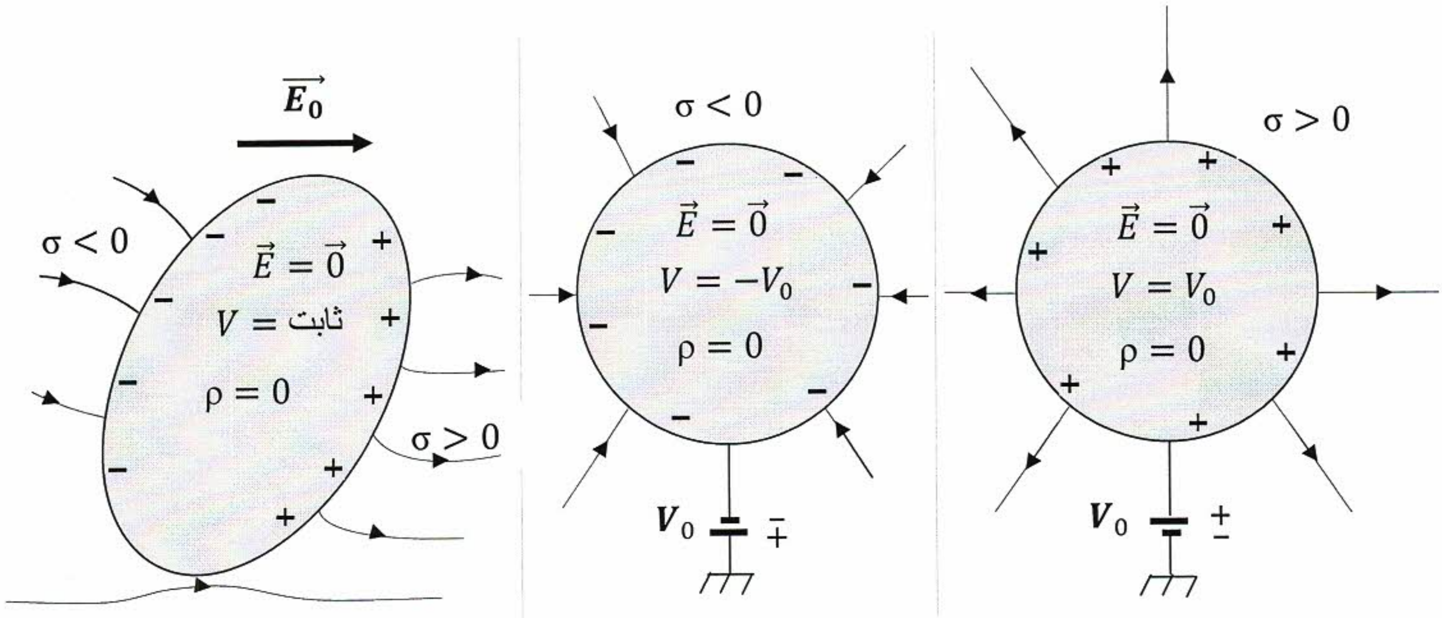
3- سطح الناقل: بما أن الكمون الكهربائي لناقل في حالة توازن ثابت فإن سطح الناقل هو إذن سطح متساوي الكمون، والحقل الكهربائي من الجهة الخارجية للناقل عندما لا يكون معدوما يكون عموديا على سطح الناقل وهذا منطقي لأنه لو كان للحقل $\vec{E}$ مركبة مماسية لسطح الناقل لبقيت الشحن الحرة في حالة حركة مستمرة ولن نحصل على حالة التوازن.

4- الكثافة الشحنية الحجمية داخل ناقل في حالة توازن: باستعمال نظرية التباعد (نظرية Green-Ostrogradsky) يمكن أن نكتب نظرية غوس بالنسبة لسطح الناقل كما يلي:

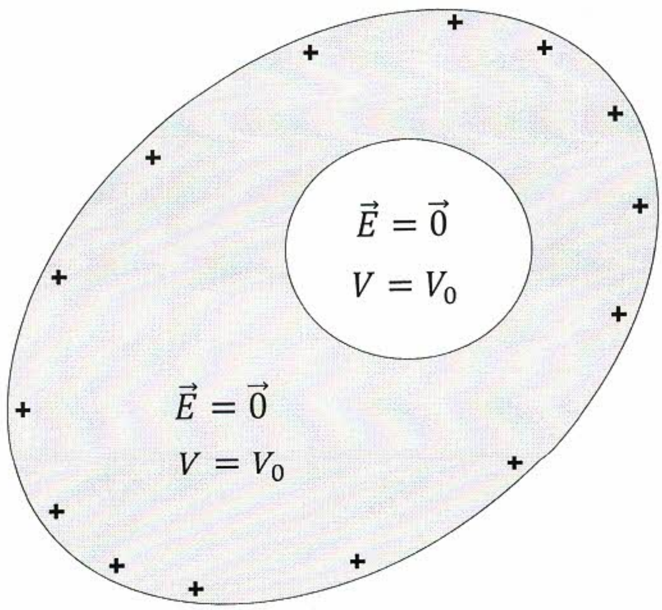
$$\iint_{(S)} \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \iiint_{(\mathcal{V})} div\vec{E}\,d\mathcal{V} = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\mathcal{V}$$

حيث $\mathcal{V}$ هو حجم الناقل. ونستنتج أن $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. وبما أن $\vec{E}$ معدوم داخل ناقل حالة توازن فإن $\rho = 0$ و $Q_{int} = 0$. إذن " **الكثافة الشحنية الحجمية ρ داخل ناقل كهربائي في حالة توازن معدومة** ".

5- توزيع الشحن في ناقل في حالة توازن: بما أن $\rho = 0$ داخل الناقل، فإن ظهور الشحن الكهربائية في ناقل تتم فقط على السطح والكثافة الشحنية التي يملكها الناقل هي سطحية ($\boldsymbol{\sigma}$) فقط. يمكن إظهار شحن كهربائية على سطح ناقل بربطه لقطب مولد كهربائي أو وضعه داخل حقل خارجي $\overrightarrow{E_0}$ ناتج عن توزيع شحني آخر (الشكل).

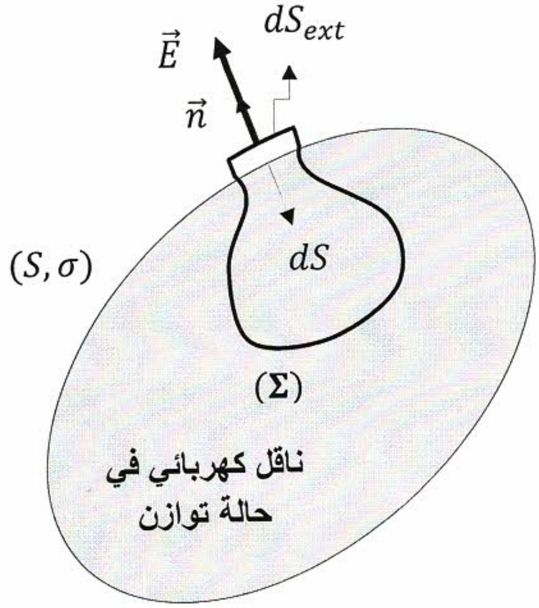


6- الناقل المجوف: الكمون في تجويف (فراغ) داخل ناقل كهربائي ثابت والشحنة التي تظهر على الناقل هي فقط على السطح الخارجي للناقل. **تطبيق:** تأكد من هذه الخاصية بتوظيف معارفك السابقة.



7- الحقل الكهربائي بالجوار الخارجي لناقل كهربائي، نظرية كولون:

بما أن سطح الناقل (S) هو سطح متساوي الكمون فإن الحقل الكهربائي في أي نقطة M قريبة جدا من سطح الناقل (بجوار الناقل) في جهته الخارجية يكون في الاتجاه الناظمي على (S).



نعتبر سطح مغلق (Σ) مشكل في الجهة الخارجية للناقل من تقاطع أنبوبة الحقل $\vec{E}$ التي ترتكز على مساحة عنصرية dS من (S) مع المساحة dS_{ext} الموازية لـ dS والقريبة جدا منها بحيث يمكن اعتبار $dS = dS_{ext}$ والحقل $\vec{E}$ يبقى ناظمي على dS_{ext} مثل dS . شكل (Σ) داخل الناقل هو كيفي.

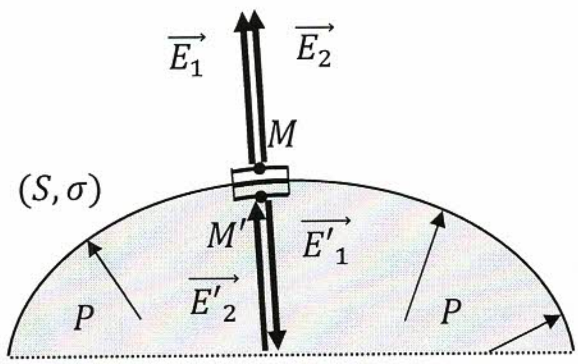
عندما نطبق نظرية غوس على السطح (Σ) فإننا نكتب:

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_{(dS_{ext})} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}$$

لأن $\vec{E}$ معدوم داخل الناقل و دائما مماسي للسطح الجانبي لأنبوبة الحقل. وبما أن dS_{ext} هي مساحة صغيرة جدا (عنصرية) وقريبة جدا من سطح الناقل، يمكن اعتبار الحقل $\vec{E}$ ثابت وناظمي على dS_{ext} . ولذلك يمكن أن نكتب: $\iint_{(dS_{ext})} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = E\,dS_{ext} = E\,dS = \frac{\sigma\,dS}{\varepsilon_0}$ ونستنتج أن شدة الحقل $\vec{E}$ بجوار الناقل هي $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. هذه النتيجة تعبر عنها " **نظرية كولون** " التالية: **الحقل الكهربائي $\vec{E}$ بالجوار المباشر لسطح ناقل كهربائي مشحون هو: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$. $\vec{n}$ هو شعاع الواحدة العمودي على سطح الناقل وهو موجه نحو الخارج.**

8- الضغط الكهروساكن: نعتبر نقطتين M و M' قريبتين جدا من سطح ناقل مشحون بكثافة σ . M توجد خارج الناقل و M' في داخله. نأخذ مساحة عنصرية dS من سطح الناقل توجد بين M و M' .

ليكن $\overrightarrow{E_1}$ الحقل الناتج عن الشحنة $\sigma\, dS$ و $\overrightarrow{E_2}$ الحقل الناتج عن باقي الشحن الأخرى على سطح الناقل في M . $\overrightarrow{E'_1}$ و $\overrightarrow{E'_2}$ هما على التوالي الحقل الناتج عن $\sigma\, dS$ والحقل الناتج عن باقي الشحن الأخرى في M' .



$$P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

لدينا العلاقات التالية:

$$\overrightarrow{E_2}(M) = \overrightarrow{E'_2}(M')$$

لأن M و M' قريبتان جدا من بعضهما.

$$\overrightarrow{E'_1}(M') = -\overrightarrow{E'_2}(M')$$

لأن $\vec{E}$ معدوم داخل الناقل.

$$\overrightarrow{E_1}(M) = -\overrightarrow{E'_1}(M')$$

لأن M و M' متناظرتان بالنسبة لـ dS .

ونستنتج من هذه العلاقات أن $\overrightarrow{E_1}(M) = \overrightarrow{E_2}(M)$ أي أن مساهمة باقي شحن الناقل في الحقل الكلي $\vec{E}(M)$ مساوية لمساهمة الشحنة $\sigma\, dS$ الموجودة على dS . لدينا إذن:

$$\vec{E}(M) = \overrightarrow{E_1}(M) + \overrightarrow{E_2}(M) = 2\,\overrightarrow{E_2}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}$$

ونستنتج أن الحقل الناتج عن جميع الشحن التي توجد على سطح الناقل (S) ما عدا التي توجد على dS وبجوار الناقل في M هو:

$$\overrightarrow{E_2}(M) = \vec{E}(M)\big/_2 = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{n}$$

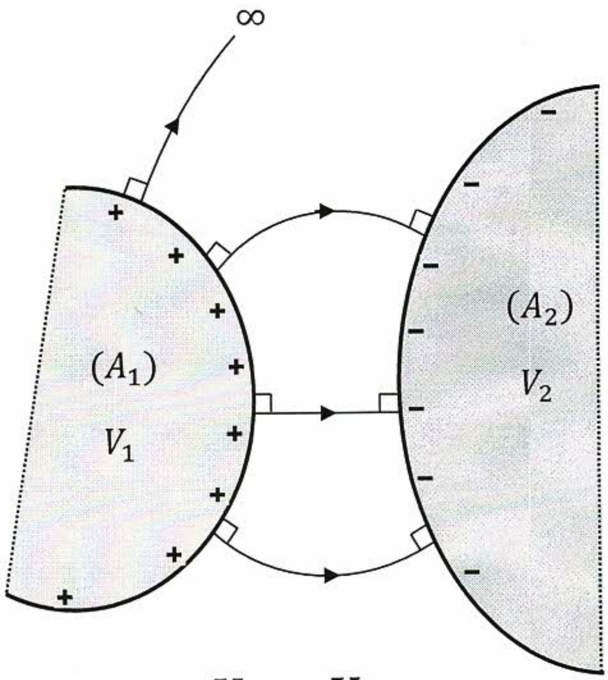
الشحنة الكهربائية $dQ = \sigma\, dS$ التي توجد على dS تتعرض لقوة كهربائية $d\vec{F}$ من طرف الحقل $\overrightarrow{E_2}$ بحيث: $d\vec{F} = dQ\,\overrightarrow{E_2}$ أي: $d\vec{F} = \sigma\, dS \cdot \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{n}$ أو: $\frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{n}$. إذن، مهما كانت إشارة σ فإن $d\vec{F}$ عمودية على سطح الناقل وموجهة نحو الخارج. عبارة هذه القوة تعطي ما يعرف بالضغط الكهروساكن P الذي يؤثر على كل نقطة من سطح الناقل.

$$P = \frac{\left\| d\vec{F} \right\|}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon_0}$$

هذا الضغط هو عادة ضعيف فلا يمكن أن يشوه سطح الناقل أو ينزع شحنا من سطح الناقل.

III- مجموعة من النواقل الكهربائية في حالة توازن:

1- قواعد توزيع خطوط الحقل الكهربائي بين مجموعة من النواقل:

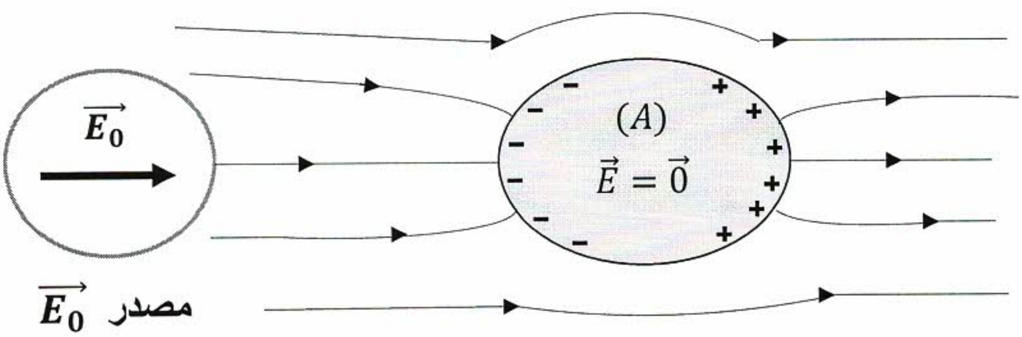


$$V_1 > V_2$$

إضافة إلى الخواص التي رأيناها في حالة الناقل الوحيد، فإن خطوط الحقل الكهربائي بين مجموعة من النواقل هي عادة منحنيات معقدة غير أنه يمكن أن نأخذ فكرة ولو كانت بسيطة عن كيفية توزيعها باعتبار الشروط اللازمة التالية:

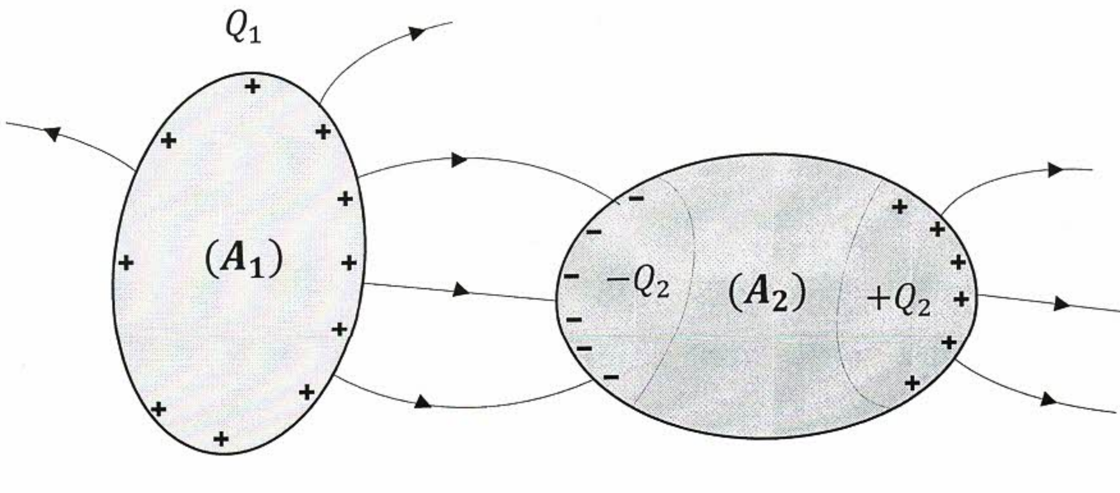
- خطوط الحقل تخرج أو تدخل عمودية على سطح كل ناقل وتتجه دائما من الشحن الموجبة نحو الشحن السالبة.
- خطوط الحقل التي تنطلق من شحن موجبة على ناقل تذهب إلى ما لا نهاية أو إلى سطح ناقل آخر يملك كمونا أصغر.
- الكمون الكهربائي يتناقص على طول خط الحقل ($V_1 > V_2$).
- لا ينغلق خط حقل على نفس الناقل.
- خطوط الحقل لناقل معزول إما تخرج من الناقل فقط أو تدخل فقط وهو يملك شحنة سطحية لها نفس الإشارة.

2- التأثير الهروساكن بين النواقل:



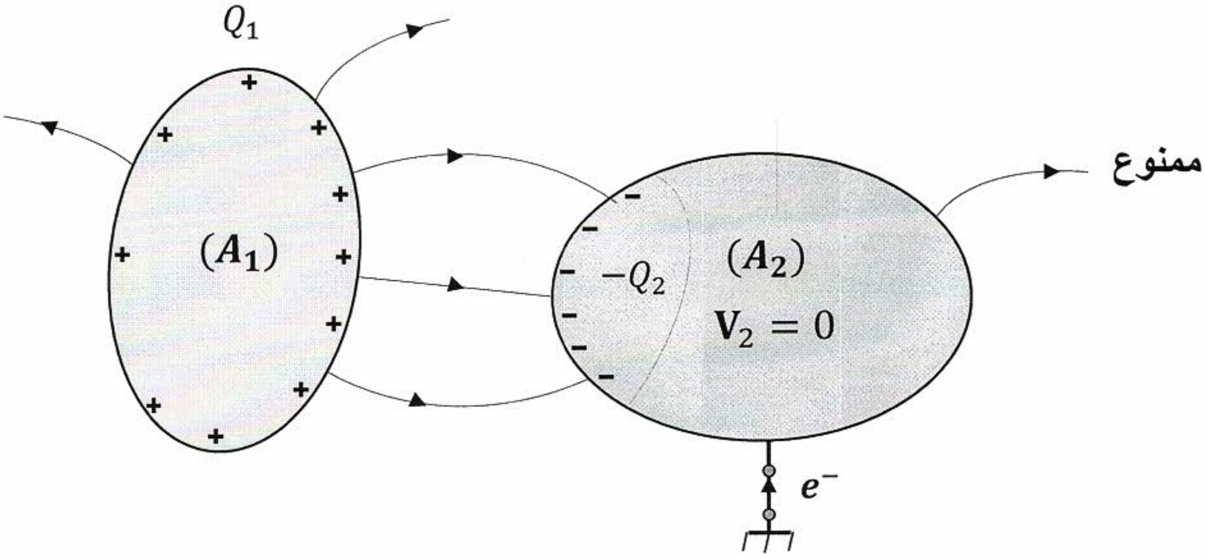
نعتبر ناقل كهربائي معزول ومحايد (غير مشحون ، $Q = 0$) . نضع هذا الناقل داخل حقل كهربائي منتظم $\overrightarrow{E_0}$ فتحدث حركة منظمة للشحن الحرة داخل الناقل تحت تأثير هذا الحقل ولا تتوقف حتى يصير الحقل $\vec{E}$ داخل الناقل معدوما ($\vec{E} = \vec{0}$) . ونحصل بذلك على ناقل مستقطب (شحنة موجبة على سطح الناقل من جهة و شحنة سالبة على الجهة المقابلة كما يوضح الشكل) . نتيجة لذلك، يظهر على سطح الناقل توزيع شحني $\boldsymbol{\sigma}$ غير منتظم مع بقاء الشحنة الكلية للناقل $Q = 0$.

(A_1) نعتبر الآن حالة وجود ناقل (A_1) مشحون بكثافة $\boldsymbol{\sigma_1}$ بجوار ناقل آخر (A_2) محايد. الناقل (A_2) يشحن بكثافة سطحية $\boldsymbol{\sigma_2}$ غير منتظمة ناتجة عن الحقل الكهربائي للناقل (A_1). ظهور التوزيع $\boldsymbol{\sigma_2}$ في محيط الناقل (A_1) يؤدي أيضا إلى تغير في شكل التوزيع $\boldsymbol{\sigma_1}$. عند حدوث التوازن، $\boldsymbol{\sigma_1}$ و $\boldsymbol{\sigma_2}$ متعلقتان ببعضهما (أي تغير في واحدة يؤدي إلى تغير في الأخرى) ونسمي هذا الفعل المتبادل بين الناقلين: **التأثير الكهروساكن** **(L’influence électrostatique)**.



- **التأثير الجزئي:** في المثال السابق، التأثير بين (A_1) و (A_2) هو تأثير جزئي لأن خطوط الحقل التي تخرج من (A_1) لا تصل جميعها إلى سطح (A_2) . ولهذا السبب فإن $|Q_1| > |Q_2|$.

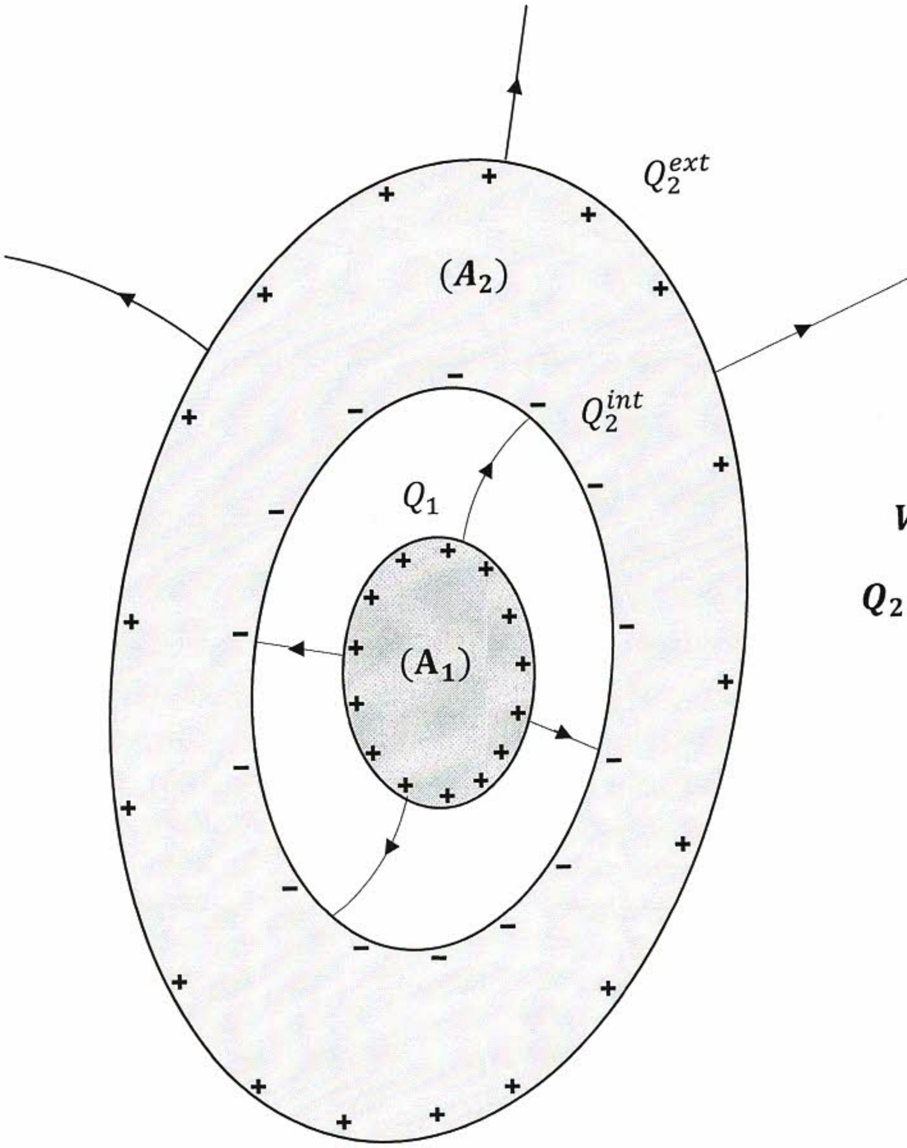
عندما نربط الناقل السابق (A_2) بالأرض، أي يصير كمونه $V_2 = 0$ (كمون الأرض معدوم)، فإن التوزيع الشحنة على سطحه يتغير كما هو على الشكل.



لا يمكن أن تظهر شحنة على الجهة الأخرى من الناقل (A_2) لأنه لا يمكن أن تذهب خطوط للحقل من كمون $V_2 = 0$ إلى ما لا نهاية حيث $V(\infty) = 0$

- **التأثير الكلي:** يكون تأثير الناقل (A_1) على (A_2) كليا عندما جميع خطوط الحقل التي تنطلق من (A_1) تصل إلى (A_2) . عمليا، نحصل على مثل هذا التأثير لما يكون الناقل (A_1) يوجد داخل الناقل (A_2) . في هذه الحالة تظهر شحنة $Q_2^{int} = -Q_1$ على السطح الداخلي للناقل (A_2) وكيفما كانت وضعية (A_1) داخل (A_2) . Q_1 هي شحنة الناقل (A_1). الشحنة الكلية للناقل (A_2) هي بكل بساطة $Q_2 = Q_2^{int} + Q_2^{ext}$ أي $Q_2 = -Q_1 + Q_2^{ext}$ ونحصل إذن على: $Q_2^{ext} = Q_1 + Q_2$.

الشكل التوضيحي التالي يمثل الحالة التي يكون فيها: $Q_1 > 0$ و $Q_2 \geq 0$.



عند التوازن لدينا

$$V_1 > 0 \ , \ Q_1 > 0$$

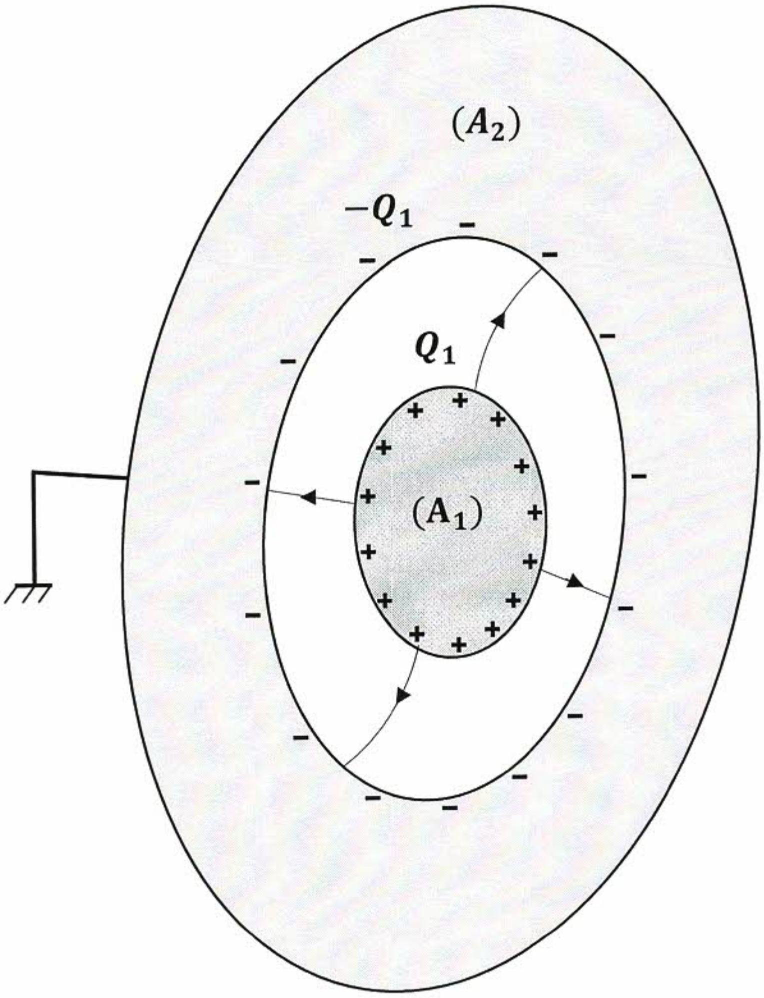
$$Q_2 = Q_2^{int} + Q_2^{ext} > 0$$

$$Q_2^{int} = -Q_1$$

$$Q_2^{ext} = Q_1 + Q_2$$

$$V_1 > V_2 > 0$$

عند ربط الناقل (A_2) بالأرض ($V_2 = 0$)، فإننا نحصل على حالة التوازن الجديدة الممثلة في الشكل التالي والتي تتميز بزوال شحنة السطح الخارجي للناقل (A_2) أي: $Q_2^{ext} = 0$ والسبب في ذلك هو استحالة وجود خطوط للحقل تنطلق من السطح الخارجي للناقل (A_2) وتذهب إلى ما لا نهاية ($V_2 = V(\infty) = 0$).
التأثير الكلي بين الناقلين تجعل السطح الداخلي للناقل (A_2) يحافظ على الشحنة $-Q_1$ المعاكسة للشحنة التي يحملها سطح (A_1).



حالة التوازن الجديدة

$$V_1 > 0 \ , \ Q_1 > 0$$

$$V_2 = 0 \, , Q_2^{ext} = 0$$

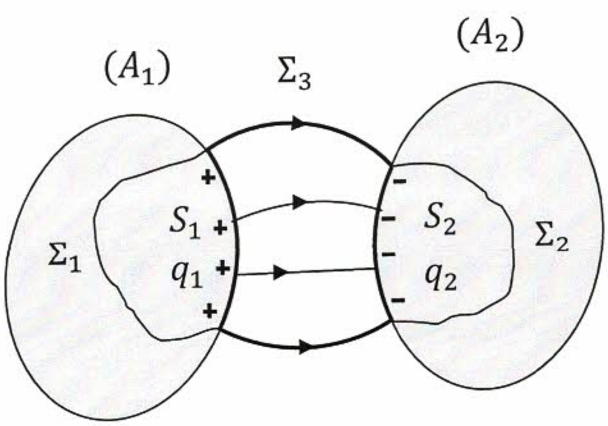
$$Q_2 = Q_2^{int} = -Q_1$$

داخل (A_2) ومن جهته الخارجية

$$\vec{E} = \vec{0}$$

3- نظرية العناصر المتقابلة (Théorème des éléments correspondants):

نعتبر ناقلان كهربائيان (A_1) و (A_2) في حالة تأثير متبادل بينهما. نأخذ مساحة S_1 من سطح الناقل



(A_1) . أنبوبة خط الحقل التي ترتكز على S_1 بين الناقلين تتقاطع مع (A_2) على المساحة S_2 . يمكن أن نبرهن بسهولة أن S_1 و S_2 تحملان شحن q_1 و q_2 متساوية ومتعاكسة في الإشارة: $q_2 = -q_1$. يكفي لذلك أن نطبق نظرية غوس على السطح المغلق (Σ) المشكل من:

- Σ_1 مساحة كيفية داخل (A_1) ترتكز على S_1 .
- Σ_2 مساحة كيفية داخل (A_2) ترتكز على S_2 .
- Σ_3 المساحة الجانية لأنبوبة الحقل بين الناقلين.

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \oiint_{\Sigma_1} \vec{E}\,\overrightarrow{dS} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}\,\overrightarrow{dS} + \oiint_{\Sigma_3} \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} = 0$$

تدفق $\vec{E}$ عبر (Σ) معدوم لأن $\vec{E} = \vec{0}$ داخل الناقلين ومماسي للمساحة الجانبية لأنبوبة الحقل Σ_3 . ونستنتج إذن أن: $\boldsymbol{q_2 = -q_1}$. S_1 و S_2 تسمى العناصر المتقابلة على الناقلين.

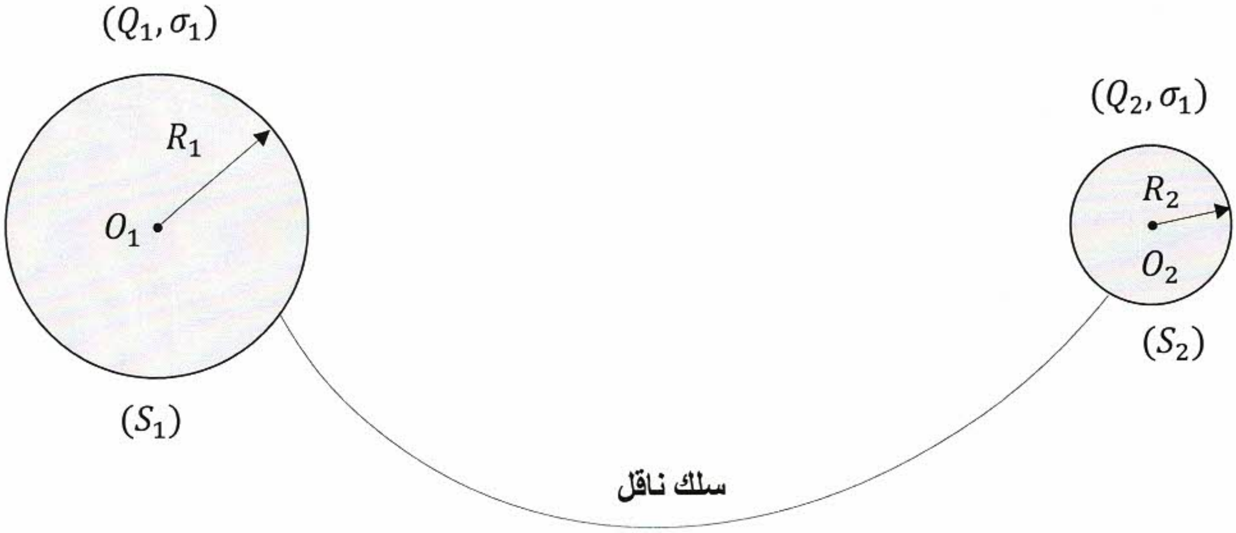
* **ملاحظات:**

- ليس لكل عناصر المساحة على (A_1) عناصر متقابلة على (A_2) لأنه يمكن أن توجد خطوط للحقل تنطلق من (A_1) ولا تصل إلى (A_2) وإنما تذهب إلى ∞ .
- عندما تكون شحنتا ناقلين متعاكستين ($Q_2 = -Q_1$)، فإن جميع خطوط الحقل التي تخرج من ناقل تصل إلى سطح الناقل الآخر والتأثير بين الناقلين هو تأثير كلي.
- عندما تكون الشحنة الكلية لمجوعة من النواقل في حالة توازن فيما بينها معدومة فإن جميع خطوط الحقل التي تنطلق من سطح أي ناقل تصل إلى سطح ناقل آخر ولا يوجد خط يذهب إلى ∞ .

4- قدرة السطوح الحادة (Le pouvoir des pointes):

قدرة السطوح الحادة تشير إلى النتيجة التجريبية التي تظهر أن الحقل الكهربائي، بجوار منطقة حادة من سطح ناقل مشحون في حالة توازن، يملك دائما شدة عالية. نعني بالمنطقة الحادة، منطقة من سطح الناقل ذات انحناء عالي أي ذات نصف قطر انحناء صغير. هذه النتيجة تعني، باعتبار قانون كولون، أن الكثافة الشحنية السطحية للمناطق الحادة $\boldsymbol{\sigma}$ عالية .

يمكن أن نثبت هذه النتيجة باستعمال كرتين ناقلتين للكهرباء ومشحونتين، نصفي قطريهما مختلفين: $R_1 \neq R_2$.
نصل الكرتين بسلك ناقل ونضعهما بعيدتين جدا عن بعضهما بحيث يمكن اعتبارهما معزولتين (لا يوجد تأثير بينهما).



لدينا:

$$V(O_1) = V(O_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} \Rightarrow \frac{\iint_{S_1}\sigma_1\, dS}{R_1} = \frac{\iint_{S_2}\sigma_2\, dS}{R_2}$$

الشحنة الكهربائية على سطح كرة معزولة يجب أن تكون موزعة بانتظام وهذا يعني أن σ_1 و σ_2 ثابتتان.
ونستنتج من العلاقة السابقة أن: $\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$ أو $\frac{\sigma_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{R_1}$. وهذا يؤكد أن الكثافة الشحنية σ تكون كبيرة كلما كان نصف قطر الانحناء صغير.

5- السعة الكهربائية لناقل معزول:

ليكن ناقل كهربائي معزول (وحيد) يحمل شحنة سطحية كثافتها σ ناتجة عن وضعه تحت كمون V.
الكمون في أي نقطة M من الناقل يكتب: $V = V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)}\frac{\sigma\, dS}{PM}$ حيث P هو موقع مساحة عنصرية كيفية dS على سطح الناقل. الشحنة الكلية للناقل هي: $Q = \iint_{(S)}\sigma\, dS$.

عند مضاعفة الكثافة σ بمقدار ثابت a بحيث تصير كثافة الشحنة السطحية للناقل هي $\sigma' = a\,\sigma$، فإن الشحنة الكلية والكمون الكهربائي للناقل يتغيران بنفس النسبة a ونحصل على القيم الجديدة $Q' = a\,Q$ و

$V' = a\,V$ ، وهكذا يكون الناقل قد انتقل من حالة التوازن (V, Q) إلى حالة توازن جديدة (V', Q') . نستنتج إذن أن أي حالة توازن كهروساكن لناقل معزول تملك دائما نفس النسبة : $\boldsymbol{C = \frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'}}$. هذه الخاصية للناقل ترجع إلى العلاقة الخطية بين Q و V بدلالة σ .

المقدار:

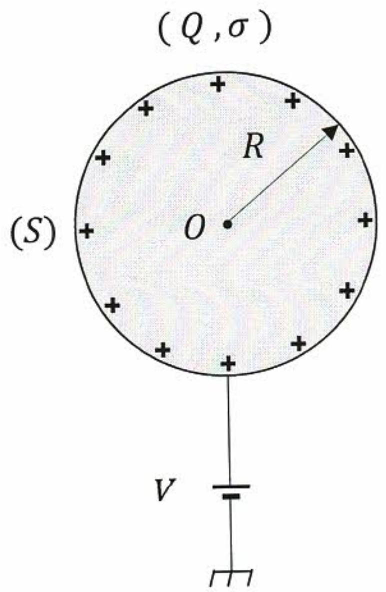
$$\boldsymbol{C = \frac{Q}{V}}$$

يسمى السعة الكهربائية لناقل معزول في حالة توازن حيث Q هي الشحنة الكلية للناقل الموجود عند الكمون V .

وحدة السعة هي الفراد ($Farad$) . ونكتب: $\boldsymbol{1\,F\,(Farad) = {}^{1\,C}/_{1\,V} = 1\,C\,V^{-1}}$

- السعة C لناقل هي **مقدار موجب** ولا تتعلق إلا **بالشكل الهندسي** للناقل.
- $1\,F$ هي قيمة عالية، ولهذا نستعمل عادة وحدات أصغر لإعطاء قيمة السعة C وهي: $\mu F\,(micro-Farad)$ و $nF\,(nano-Farad)$ و $pF\,(pico-Farad)$ حيث: $1\,\mu F = 10^{-6}\,F$ ، $1\,nF = 10^{-9}\,F$ ، $1\,pF = 10^{-12}\,F$.

<u>**تطبيق:**</u> أحسب السعة الكهربائية لناقل كروي نصف قطره R .



وضع الناقل تحت كمون V يؤدي إلى شحنه سطحيا بكثافة σ منتظمة. الشحنة الكلية التي تظهر على سطح الناقل (S) هي:

$$Q = \iint_{(S)} \sigma\, dS = \sigma\, S = 4\pi R^2 \sigma$$

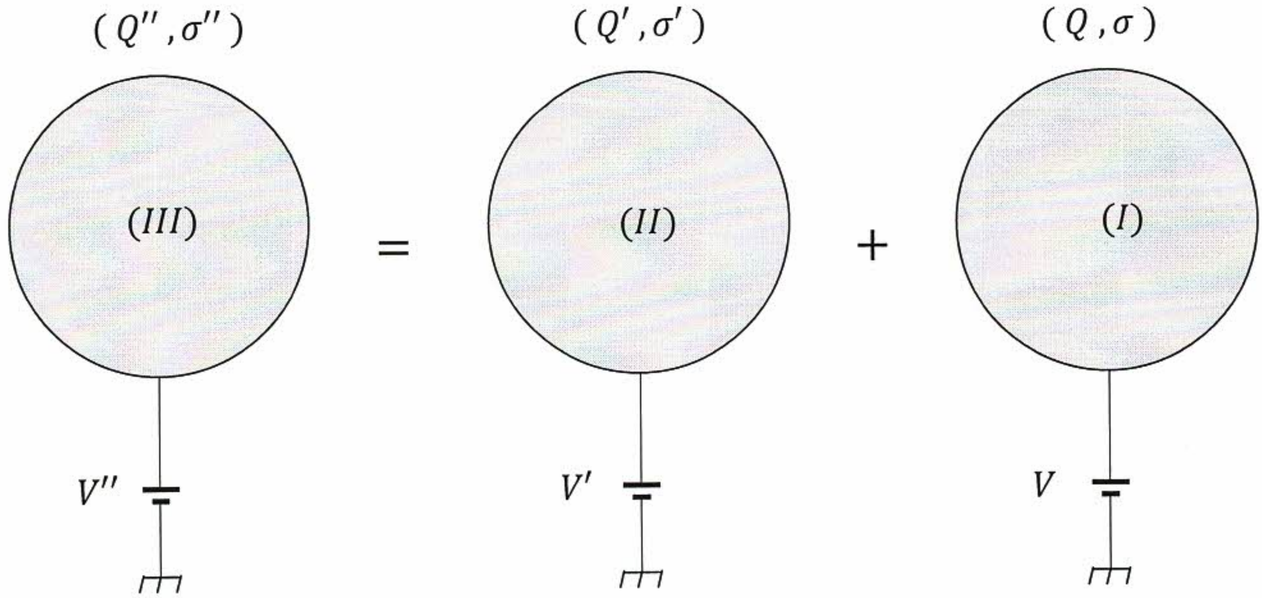
وبما أن الكمون V هو نفسه في كل مكان من الناقل و الشحنة الكلية Q توجد على نفس المسافة R من مركز الناقل O ، فإنه يمكن أن نكتب:

$$V = V(O) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R}$$

ونستنتج أن سعة ناقل كروي معزول هي: $\boldsymbol{C = \frac{Q}{V} = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,R}$.

6- مطابقة عدة حالات توازن:

نعتبر حالتي التوازن (V, Q) و (V', Q') لناقل كهربائي.



$$\boldsymbol{C = \frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'} = \frac{Q''}{V''}}$$

حالة التوازن $(\boldsymbol{I})$ + حالة التوازن $(\boldsymbol{II})$ = حالة التوازن $(\boldsymbol{III})$

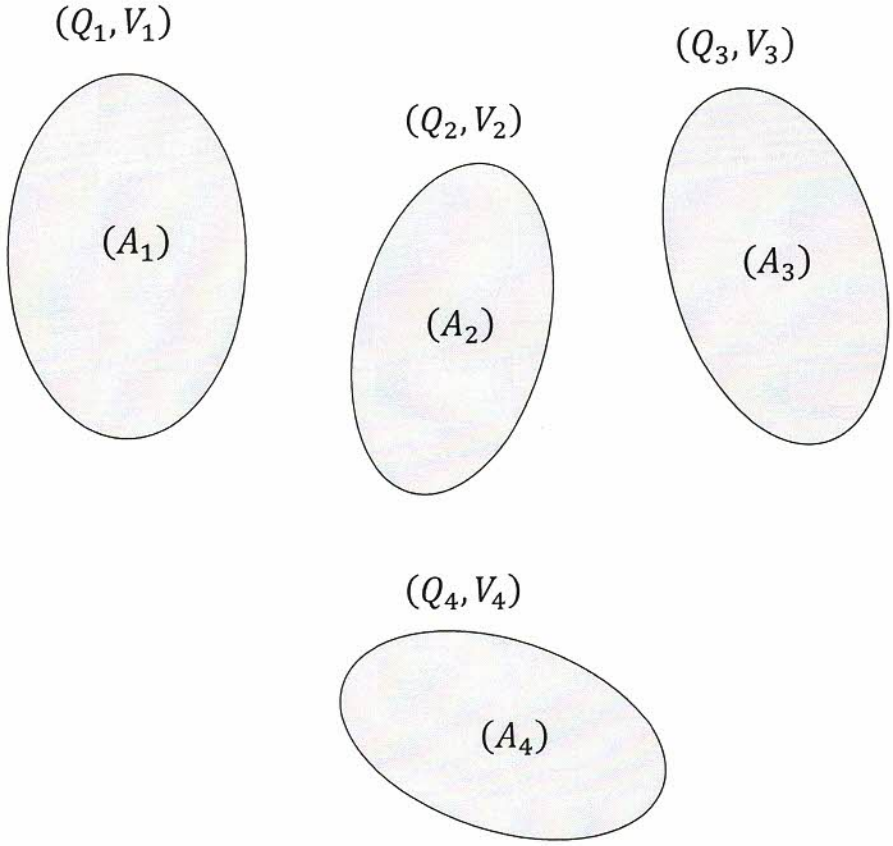
بسبب العلاقة الخطية بين الشحنة الكلية والكمون بدلالة الكثافة السطحية في حالتي التوازن (I) و (II) ، فإن أي حالة توازن جديدة للناقل بكثافة $\sigma'' = a\,\sigma + b\,\sigma'$ تستلزم أن الشحنة والكمون الجديدان للناقل هما: $Q'' = aQ + bQ'$ و $V'' = aV + bV'$. ونستنتج أن مطابقة حالات توازن لناقل أو حتى لمجموعة من النواقل هي أيضا حالة توازن. إذن الحالة $(V'' = V + V', Q'' = Q + Q')$ هي أيضا حالة توازن.

7- معاملات التأثير بين مجموعة من النواقل:

عندما يكون لدينا مجموعة من النواقل الكهربائية توجد في نفس المحيط بحيث يؤدي ذلك إلى حدوث تأثير متبادل فيما بينهم، فعند حدوث التوازن تكون شحنة كل ناقل تتعلق بالشحن التي تحملها النواقل الأخرى وبالشكل الهندسي لكل ناقل وموقعه بالنسبة للنواقل الأخرى. لوصف حالة التوازن لمجوعة النواقل نستعمل ما يعرف

بمعاملات السعة ومعاملات التأثير. معاملات السعة تقيس سعة كل ناقل بوجود النواقل الأخرى ومعاملات التأثير تقيس التأثير المتبادل بين كل ناقلين.

نعتبر مجموعة من النواقل $\{(A_1),(A_2),\dots,(A_n)\}$ يوجد كل واحد منها عند حالة التوازن (Q_i,V_i) .



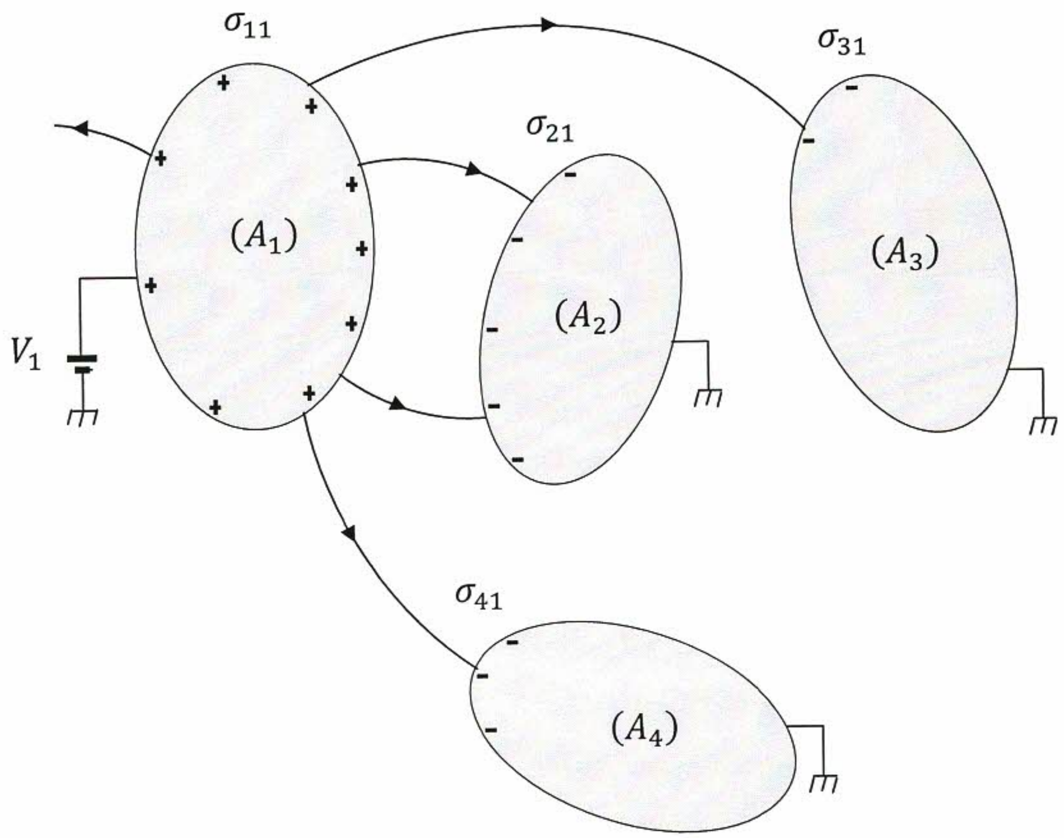
باعتبار قانون تطابق حالات التوازن، يمكن أن نكتب التوزيع الشحني السطحي الذي يظهر على الناقل (A_1) من الشكل:

$$\sigma_1=\sum_{j=1}^{j=n}\sigma_{1j}=\sigma_{11}+\sigma_{12}+\sigma_{13}+\dots+\sigma_{1n}$$

حيث σ_{1j} هي الكثافة الشحنية التي تظهر على سطح الناقل (A_1) عندما تكون جميع النواقل عند الكمون $V_{i\neq j}=0$ ما عدا الناقل (A_j) الذي يوجد عند الكمون V_j .

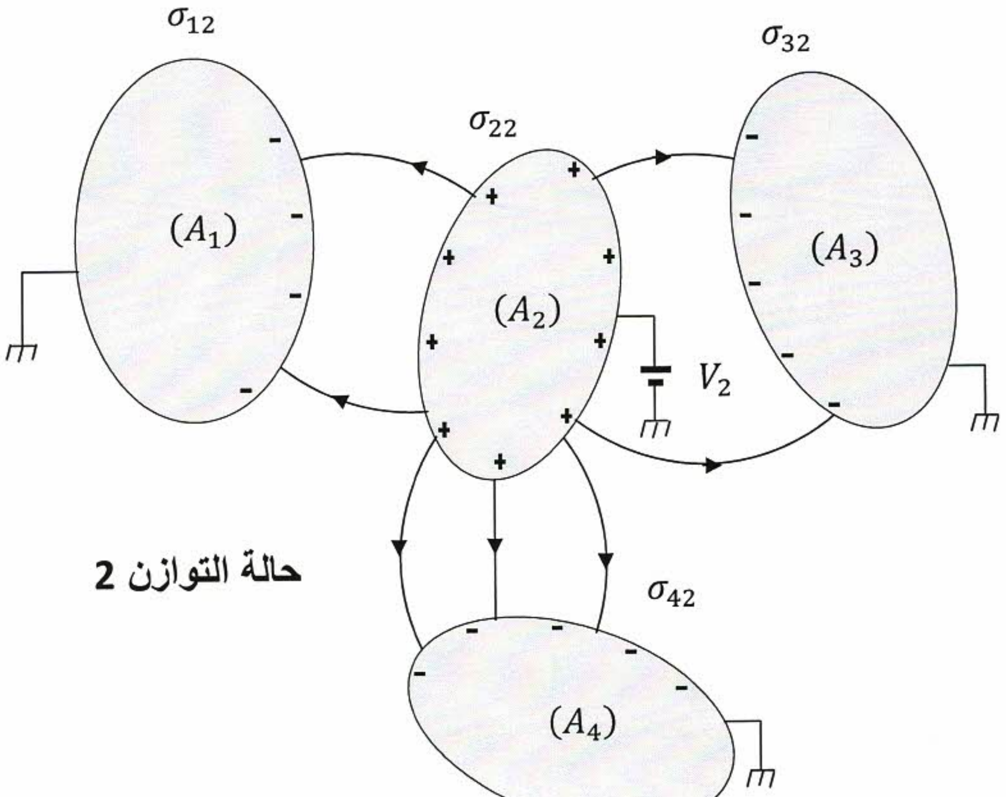
إذن في حالة الشكل السابق: σ_{11} هي الكثافة الشحنية التي تظهر على سطح الناقل (A_1) عندما يكون الناقل (A_1) يوجد عند الكمون V_1 والنواقل الأخرى عند الكمون $V_{i\neq1}=0$. و σ_{12} هي الكثافة الشحنية التي تظهر على سطح الناقل (A_1) عندما يكون الناقل (A_2) يوجد عند الكمون V_2 والنواقل الأخرى عند الكمون $V_{i\neq2}=0$. و σ_{13} هي الكثافة الشحنية التي تظهر على سطح الناقل (A_1) عندما يكون الناقل (A_3) يوجد عند الكمون V_3 والنواقل الأخرى عند الكمون $V_{i\neq3}=0$. وكذلك σ_{14} هي الكثافة التي تظهر على سطح الناقل (A_1) عندما يكون الناقل (A_4) يوجد عند الكمون V_4 والنواقل الأخرى عند الكمون $V_{i\neq4}=0$.

حالة التوازن التي تعطي الكثافة σ_{11} :



حالة التوازن 1

حالة التوازن التي تعطي الكثافة σ_{12} :



وبنفس الكيفية التي حصلنا فيها على σ_{12} يمكن الحصول على σ_{13} بوضع الناقل (A_3) تحت الكمون V_3 وعلى σ_{14} بوضع الناقل (A_4) عند الكمون V_4 مع جعل النواقل الأخرى في كل مرة تحت كمون معدوم.

تطبيق: مثل كما هو في الحالتين السابقتين، حالتي التوازن 3 و 4 التي تعطي σ_{13} و σ_{14} .

الشحنة الكلية Q_1 للناقل (A_1) الناتجة عن الكثافة σ_1 تكتب:

$$Q_1 = \iint_{(S_1)} \sigma_1 \, dS = \sum_{j=1}^{j=n} \iint_{(S_1)} \sigma_{1j} \, dS = Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} + \cdots + Q_{1n}$$

حيث (S_1) هو سطح الناقل (A_1) .

معرفة Q_1 تتطلب إذن معرفة n حالة توازن كهربائي (في المثال الذي أخذناه في الشكل السابق $n = 4$).

عند اعتبار حالة التوازن (**حالة التوازن 1**) التي تكون فيها جميع النواقل (A_j) عند الكمون $V_j = 0$ ماعدا الناقل (A_1) عند الكمون V_1 (في المثال السابق على الشكل أخذنا $V_1 > 0$) لدينا:

- $\boldsymbol{Q_{11} = C_{11}\, V_1}$: Q_{11} هي الشحنة التي تظهر على (A_1) بسبب الكمون V_1 و C_{11} هو معامل السعة للناقل (A_1) ويمثل سعة الناقل مع وجود النواقل الأخرى وهي تختلف عن سعة الناقل (A_1) لما يكون وحيدا. أي تغيير في مواقع النواقل بالنسبة لبعضها البعض يؤدي إلى تغيير في معامل السعة.
- بسبب التأثير المتبادل بين النواقل، تظهر كثافة شحنية σ_{j1} على سطوح النواقل (A_j) الأخرى التي يمكن أن تصل إليها خطوط للحقل الكهربائي من الناقل (A_1) ونتيجة لنظرية العناصر المتقابلة فإن الشحنة Q_{j1} التي تظهر على الناقل (A_j) هي معاكسة للشحنة التي تظهر على (A_1) ومتناسبة مع Q_{11} أي V_1. معامل التناسب C_{j1} الذي يقيس التأثير المتبادل بين (A_j) و (A_1) يسمى معامل التأثير وهو دائما سالب. الشحن التي تظهر على النواقل (A_j) المربوطة بالأرض هي :

$$Q_{21} = C_{21}\, V_1\,, \qquad Q_{31} = C_{31}\, V_1\,, \qquad \cdots, \qquad Q_{n1} = C_{n1}\, V_1$$

عند اعتبار **حالة التوازن 2** التي وضعنا فيها جميع النواقل عند الكمون $V_j = 0$ ماعدا الناقل (A_2) عند الكمون V_2 ، فإننا نحصل على:

$$Q_{n2} = C_{n2}\, V_2 \;\text{،}\; \ldots \;\text{،}\; Q_{32} = C_{32}\, V_2 \;\text{،}\; Q_{22} = C_{22}\, V_2 \;\text{،}\; Q_{12} = C_{12}\, V_2$$

***<u>تنبيه</u>*: في المثال الذي أخذناه على الشكل: $n = 4$**

مطابقة جميع حالات التوازن (1 و 2 و 3 و 4) تعطينا حالة التوازن العامة (الممثلة بالشكل الأول) التي تكون فيها الشحنة الكلية Q_i لكل ناقل تساوي مجموع الشحن Q_{ij} لحالات التوازن التي تمت مطابقتها بحيث نكتب:

$$Q_i = Q_{i1} + Q_{i2} + Q_{i3} + \cdots + Q_{ii} + \cdots + Q_{in}$$

أي:

$$Q_1 = C_{11}\, V_1 + C_{12}\, V_2 + C_{13}\, V_3 + \cdots + C_{1n}\, V_n$$

$$Q_2 = C_{21}\, V_1 + C_{22}\, V_2 + C_{23}\, V_3 + \cdots + C_{2n}\, V_n$$

$$Q_3 = C_{31}\, V_1 + C_{32}\, V_2 + C_{33}\, V_3 + \cdots + C_{3n}\, V_n$$

$$\vdots$$

$$Q_n = C_{n1}\, V_1 + C_{n2}\, V_2 + C_{n3}\, V_3 + \cdots + C_{nn}\, V_n$$

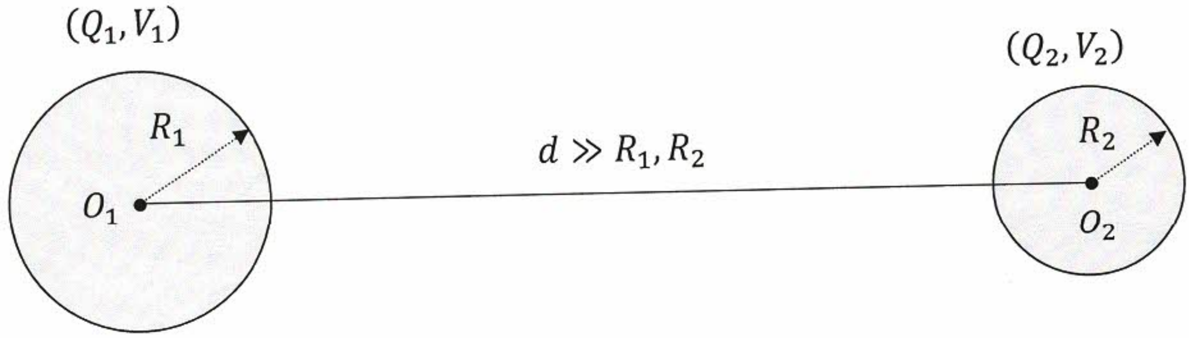
وباستعمال المصفوفات، يمكن كتابة هذه العلاقات من الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

<u>خواص</u>: - معاملات السعة C_{ii} هي **دائما موجبة** ($C_{ii} > 0$) ومعاملات التأثير C_{ij} هي **دائما سالبة** ($C_{ij} < 0$) نتيجة لنظرية العناصر المتقابلة).

- بسبب عدم التأثير الكلي بين النواقل، يمكن أن تذهب خطوط للحقل من الناقل (A_i) إلى ما لا نهاية (∞) وهذا يؤدي إلى أن: $\left|\sum_{j\neq i} Q_{ij}\right| \geq Q_i$ أي: $C_{ii} \geq \left|\sum_{j\neq i} C_{ji}\right|$. المساواة نحصل عليها فقط في حالة التأثير الكلي أي لما جميع خطوط الحقل التي تنطلق من (A_i) تصل إلى سطوح النواقل الأخرى (A_j).
- التأثير المتبادل بين الناقلين (A_i) و (A_j) هو نفسه ولذلك فإن: $C_{ij} = C_{ji}$ والمصفوفة $[C_{ij}]$ هي إذن متناظرة.

تطبيق: نعتبر ناقلان كهربائيان كرويان (A_1) و (A_2) نصفا قطريهما R_1 و R_2 ويحملان الشحنتين Q_1 و Q_2 ويوجدان علي مسافة d بين مركزيهما O_1 و O_2 مع: $d \gg R_1, R_2$. أحسب معاملات السعة والتأثير للناقلين.



قارن بين معاملات السعة لهذه الحالة والسعة الكهربائية للناقلين عندما يكونان معزولين.

للجواب على السؤال يكفي أن نوظف واحدة من خواص النواقل في حالة توازن والشكل الكروي للناقلين وكون المسافة $d = O_1O_2$ كبيرة جدا أمام R_1 و R_2 . كل ذلك يسمح لنا أن نكتب:

$$V_1 = V(O_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_d}$$

$$V_2 = V(O_2) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d} = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{C_d} = \frac{Q_1}{C_d} + \frac{Q_2}{C_2}$$

حيث: $C_1 = 4\pi\varepsilon_0\, R_1$ و $C_2 = 4\pi\varepsilon_0\, R_2$ و $C_d = 4\pi\varepsilon_0\, d$. من المعادلتين السابقتين نحصل على :

$$Q_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & {}^1/_{C_d} \\ V_2 & {}^1/_{C_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} {}^1/_{C_1} & {}^1/_{C_d} \\ {}^1/_{C_d} & {}^1/_{C_2} \end{vmatrix}} \;,\; Q_2 = \frac{\begin{vmatrix} {}^1/_{C_1} & V_1 \\ {}^1/_{C_d} & V_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} {}^1/_{C_1} & {}^1/_{C_d} \\ {}^1/_{C_d} & {}^1/_{C_2} \end{vmatrix}}$$

وبعد حساب المحددات في عبارات Q_1 و Q_2 نجد:

$$Q_1 = \frac{C_1\, C_d^2}{C_d^2 - C_1\, C_2}\, V_1 - \frac{C_1\, C_2\, C_d}{C_d^2 - C_1\, C_2}\, V_2 \;,\; Q_2 = -\frac{C_1\, C_2\, C_d}{C_d^2 - C_1\, C_2}\, V_1 + \frac{C_2\, C_d^2}{C_d^2 - C_1\, C_2}\, V_2$$

ونستنتج أن:

$$C_{11} = \frac{C_1}{1 - {}^{C_1\, C_2}/_{C_d^2}} \;,\; C_{22} = \frac{C_2}{1 - {}^{C_1\, C_2}/_{C_d^2}} \;,\; C_{12} = C_{21} = \frac{-\,{}^{C_1\, C_2}/_{C_d}}{1 - {}^{C_1\, C_2}/_{C_d^2}}$$

وبما أن: $C_d^2 > C_1\, C_2$ فإن: $C_{11} > 0$ و $C_{22} > 0$ و $C_{12} = C_{21} < 0$.

تمرين 1 (امتحان استدراكي 2016): ثلاث كرات معدنية متماثلة، نصف قطرها R وتتطابق مراكزها مع رؤوس مثلث متساوي الأضلاع طولها d . نربط كرة بمولد كمونه V_1 موجب $(V_1 > 0)$ والكرتين المتبقيتين بالأرض . $(V_2 = V_3 = 0)$

1- حدد طبيعة الشحن الكهربائية التي تظهر على كل كرة ومثل بشكل كيفي خطوط الحقل الكهربائي الناتجة عن حالة التوازن الكهربائي الجديدة.

2- في حالة هذه المجموعة من النواقل، جميع معاملات السعة C_{ii} وجميع معاملات التأثير C_{ij} متساوية. لماذا؟

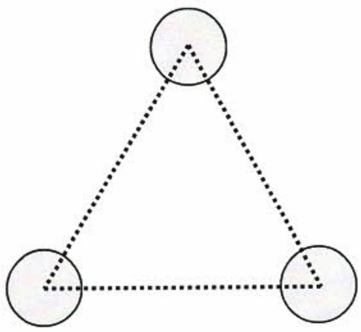
3- أكتب العلاقات التي تربط بين هذه المعاملات وحالة التوازن.

4- عندما تكون $d >> R$ ، أكتب عبارة الكمون الكهربائي لكل كرة بدلالة الشحن الكهربائية الناتجة عن حالة التوازن والهندسة الخاصة بمجوعة النواقل الكهربائية ثم أشرح، من دون إجراء حساب، كيف تحصل على معاملات السعة والتأثير C_{ii} و C_{ij} .

5- تمكن طالب من حساب C_{11} و C_{12} فوجد :

$$C_{12} = \frac{-C^2.C_d}{C(C+C_d)-2C_d^2} \quad , \quad C_{11} = \frac{C.C_d(C+C_d)}{C(C+C_d)-2C_d^2}$$

حيث: $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ و $C_d = 4\pi\varepsilon_0 d$. هل يمكن قبول هذه النتيجة ؟ **برر إجابتك.**



تمرين 2: في حالة مجوعة النواقل السابقة، نضع جميع الكرات عند نفس الكمون الموجب V_0 .

1- مثل بشكل تقريبي توزيع الشحن الكهربائية التي تظهر على سطح كل كرة وخطوط الحقل الكهربائي في مستوي المثلث.

2- أعد حساب معاملات السعة والتأثير لمجموعة النواقل. قارنها مع النتائج السابقة. ماذا تستنتج ؟

الجواب: الشكل الهندسي لمجموعة النواقل هو نفسه في التمرينين ولذلك لدينا دائما (فكر مليا وحاول حتى تصل):

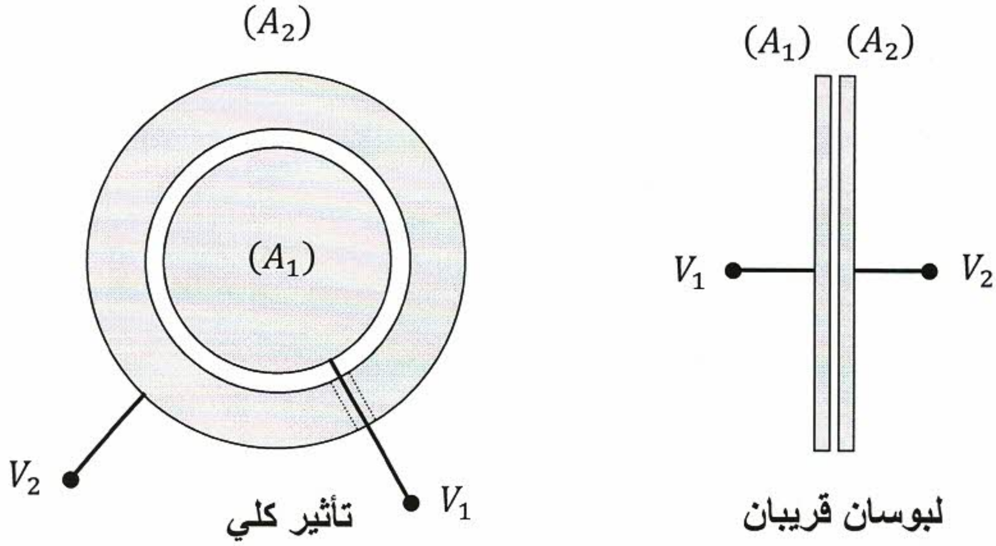
$$C_{ii} = \frac{C\ C_d(C_d^2 - C^2)}{C_d^3 + 2C^3 - 3C^2\ C_d} \quad , \quad C_{ij} = \frac{-C^2\ C_d(C_d - C)}{C_d^3 + 2C^3 - 3C^2\ C_d}$$

تأكد من صحة هذه النتائج بالتحقق من خواص معاملات السعة والتأثير.

8 - المكثفة الكهربائية:

تعريف: نسمي مكثفة كهربائية كل جملة مكونة من ناقلين كهربائيين في حالة تأثير كهربائي بينهما.

عمليا، يوجد نوعان من المكثفات: - مكثفات ذات **لبوسين قريبين** - مكثفات ذات **تأثير كلي** .



على العموم، اللبوسان مفصولان بعازل كهربائي من أجل الزيادة في سعة المكثفة.

سعة مكثفة كهربائية: نعتبر ناقلان (A_1) و (A_2) موضوعان عند الكمون V_1 و V_2 ويحملان الشحنتين Q_1 و Q_2 على التوالي. من الفقرة السابقة لدينا:

$$Q_1 = C_{11}\,V_1 + C_{12}\,V_2$$

$$Q_2 = C_{21}\,V_1 + C_{22}\,V_2$$

المعاملات C_{ij} لا تتعلق بمقادير Q_i و V_i وإنما بشكل ووضعية الناقلين بالنسبة لبعضهما البعض. للحصول على عبارات C_{ij} يكفي أن نأخذ حالات توازن خاصة وبسيطة للناقلين.

في حالة التأثير الكلي بين الناقلين لدينا: $Q_2 = Q_2^{int} + Q_2^{ext} = Q_2^{ext} - Q_1$. وعندما نربط (A_2) بالأرض ($V_2 = 0$ و $Q_2^{ext} = 0$) نحصل على: $Q_2 = -Q_1$ ، أي: $C_{11} = -C_{21}$.

العلاقة $Q_2 = -Q_1$ صحيحة فقط لما نربط الناقل (A_2) بالأرض وأما $C_{11} = -C_{21}$ فهي صحيحة في جميع حالات التوازن. في الحالة العامة لدينا: $Q_1 = C_{11}\, V_1 + C_{12}\, V_2$. وبما أن $C_{12} = C_{21}$ و $C_{11} = -C_{21}$ فإن ذلك يستلزم أن: $Q_1 = C_{11}(V_1 - V_2)$. إذن: $C_{11} = Q_1/_{V_1 - V_2}$.

اصطلاحا، تعرف السعة الكهربائية C لمكثفة شحنتها Q وفرق الجهد (الكمون) بين طرفيها $V = V_1\_V_2$ كما يلي: $\boldsymbol{C = C_{11}}$ و $\boldsymbol{V = V_1 - V_2}$ و $\boldsymbol{Q = Q_1}$ وهذا يؤدي إلى العلاقة:

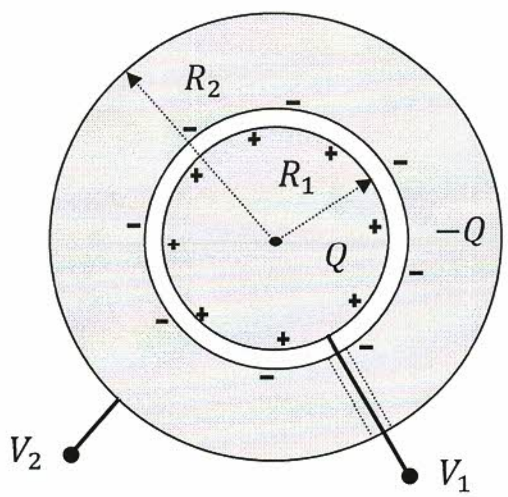
$$\boldsymbol{Q = C\,V} \quad \text{أو} \quad \boldsymbol{C = Q/_V} \ .$$

ملاحظات: - تسمى هذه التركيبة مكثفة لأنها تسمح " بتكثيف الكهرباء " أي تكديس الشحن الكهربائية على سطحي الناقلين في المنطقة الموجودة بين اللبوسين، وهكذا وبصناعة مكثفات ذات سعة عالية يمكن الحصول على شحن Q مرتفعة باستعمال جهد V ليس عاليا.

- الشحنة Q_2 الموجودة على (A_2) في حالة التأثير الكلي هي: $Q_2 = Q_2^{ext} - Q_1$. الشحنة Q_2 تساوي $-Q_1$ فقط عندما يكون (A_2) موصول بالأرض غير أنه تبقى Q_2^{ext} على العموم مهملة أمام $-Q_1$.
- بالنسبة لمكثفة ذات لبوسين قريبين من بعضهما، نحصل على نفس النتائج السابقة عندما تكون المسافة بين اللبوسين صغيرة جدا أمام أبعاد الناقلين. في هذه الحالة، الشحن الكلية Q_1 و Q_2 للناقلين، يتم تكثيفها على الوجهين المتقابلين بكيفية أشد كلما كانت المسافة بين الناقلين أصغر. وهذا يؤدي إلى حالة قريبة جدا من مكثفة ذات تأثير كلي.

سعة مكثفات بسيطة:

- **المكثفة الكروية:**



باستعمال نظرية غوس نحصل على الحقل بين R_1 و R_2

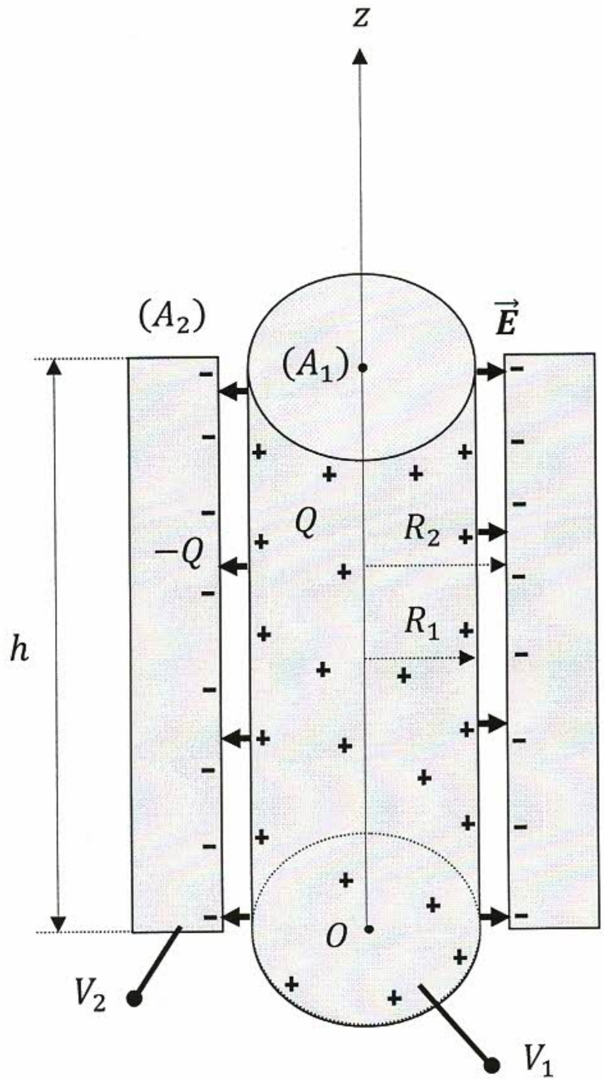
$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ مع $dV = -\vec{E}\,\overrightarrow{dr} = -E(r)dr$

أي: $V = V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1} E(r)dr$. إذن:

$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ مع: $C = Q/_V$. وأخيرا نجد:

$$\boldsymbol{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1\, R_2}{R_2 - R_1}}$$

- **المكثفة الأسطوانية:**



بين R_1 و R_2 ، الحقل $\vec{E}$ يخرج عمودي على سطح الناقل (A_1) ويدخل عمودي على سطح الناقل (A_2) . الاتجاه العمودي على هذين السطحين هو شعاع الواحدة $\vec{u}_r$ لجملة الإحداثيات الأسطوانية، وبما المسافة بينهما صغيرة، فإن $\vec{E}$ يحافظ على الاتجاه $\vec{u}_r$ بين الناقلين. إذن، بين R_1 و R_2 ، يمكن أن نكتب: $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. وعندما نطبق نظرية غوس نحصل على:

$$\vec{\mathrm{E}}(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi\, r\, h}\vec{u}_r$$

و:

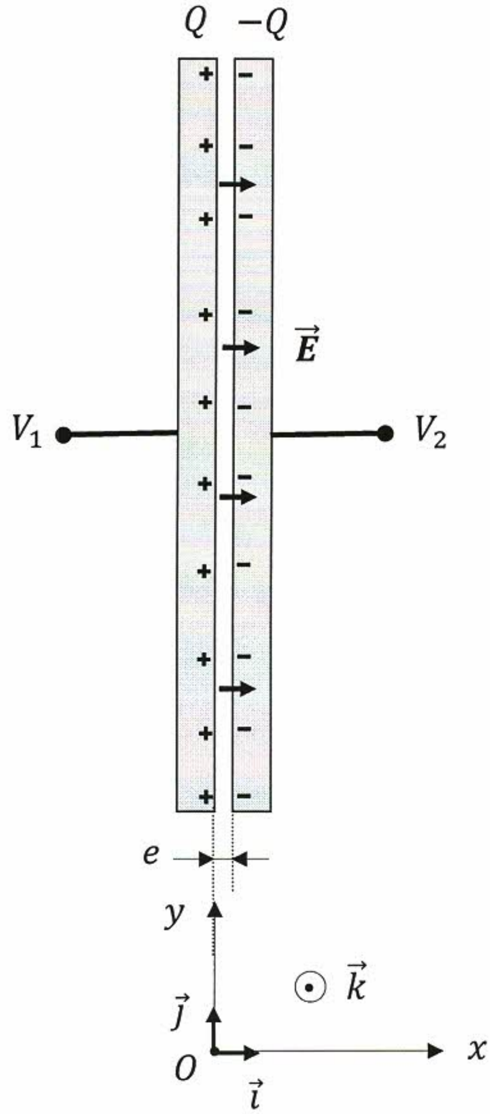
$$V = V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1}\frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi\, r\, h}dr$$

ولما نكامل نجد: $V = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi\, h}\ln\left({R_2}/{R_1}\right)$

ونحصل في النهاية على سعة هذه المكثفة : $\boldsymbol{C = {2\,\pi\,\varepsilon_0\,h}\Big/{\ln\left({R_2}/{R_1}\right)}}$

سؤال: ناقش لماذا لا يتعلق الحقل $\vec{E}$ بالإحداثيات θ و z ومتى يصير ذلك غير صحيح. ما هو سطح غوس الذي تم اختياره لحساب الحقل.

- **المكثفة المستوية:**



شحن المكثفة بواسطة الكمون $V = V_1 - V_2$ يؤدي إلى ظهور شحنتين متعاكستين Q و $-Q$ على السطحين الداخليين للمكثفة وعندما تكون المسافة e بين اللبوسين صغيرة جدا فإن كثافة توزيع الشحنة σ تكون منتظمة والحقل $\vec{E}$ في الاتجاه $\vec{i}$ العمودي على المستويين المشحونين.
بالرجوع إلى النتائج التي تحصلنا عليها في حالة المستوي اللامنتهي يمكن أن نستنتج مباشرة أن الحقل داخل المكثفة هو: $\vec{E} = {\sigma}/{\varepsilon_0}\ \vec{i}$ ، ومن العلاقة $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ ، نستنتج أن: $dV = -E\,dx = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dx$ ولما نكامل نحصل على:

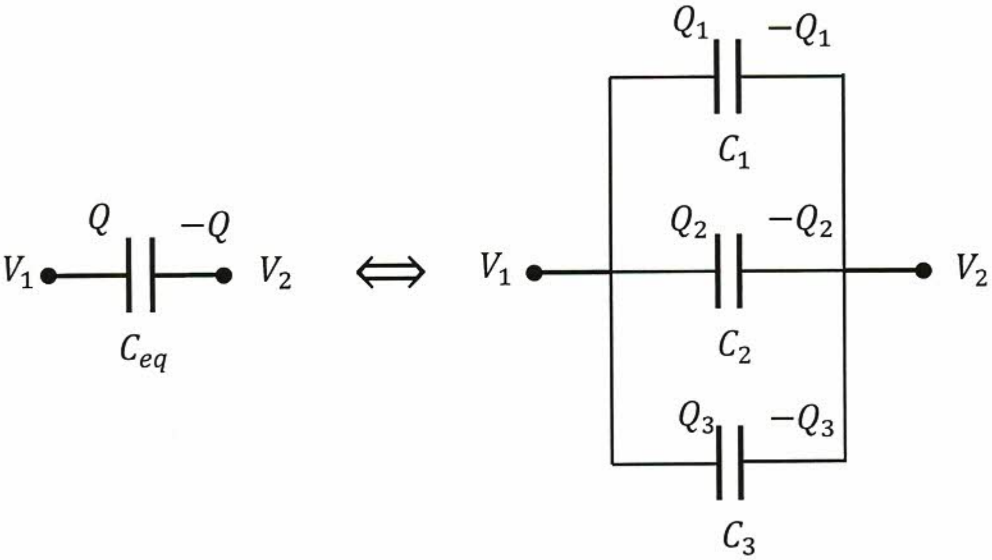
$$V = V_1 - V_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_e^0 dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,e$$

إذا كانت S هي مساحة اللبوسين فإن:
$Q = \sigma S$ وهذا يعني أن: $V = {Q\,e}/{\varepsilon_0\,S}$ ، أي سعة المكثفة المستوية هي:

$$C = {Q}/{V} = {\varepsilon_0\,S}/{e}$$

جمع المكثفات:

- **جمع المكثفات على التوازي:**



$V = V_1 - V_2$

C_1 شحنة Q_1

C_2 شحنة Q_2

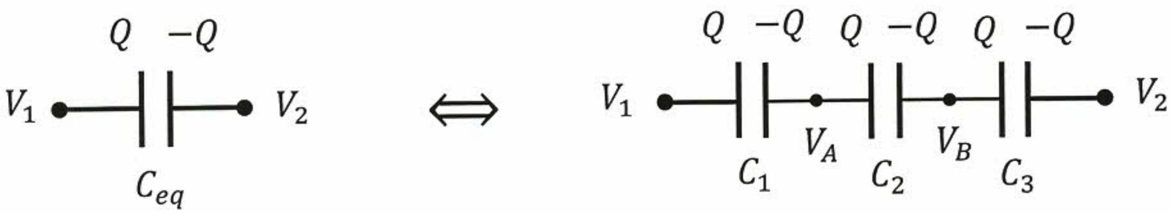
C_3 شحنة Q_3

$$Q = \sum_i Q_i = \sum_i C_i \; V = C_{eq}\, V$$

إذن:

$$\boldsymbol{C_{eq} = \sum_i C_i}$$

- **الجمع على التساسل:**



$$V = V_1 - V_2 = V_1 - V_A + V_A - V_B + V_B - V_1 = \sum_i V_i = \sum_i \frac{Q}{C_i} = Q \sum_i \frac{1}{C_i} = {}^{Q}\!/_{C_{eq}}$$

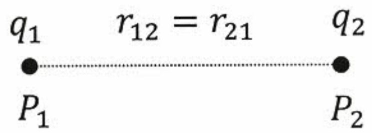
$$\boldsymbol{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$

9- الطاقة الكهروساكنة:

رأينا أن الطاقة الكهربائية الكامنة لشحنة q توجد داخل كمون V هي: $E_p = W_e = q\,V$. W_e تسمى أيضا الطاقة الكهربائية للشحنة q .

في حالة مجموعة من الشحن $\{q_i\}$ توجد في نفس الفضاء، الطاقة الكهربائية للمجموعة تكتب:

- في حالة شحنتين $\{q_1, q_2\}$:



طاقة الشحنة q_1 هي: $W_e^1 = q_1\,V(P_1) = \frac{q_1\,q_2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r_{21}}$

طاقة الشحنة q_2 هي: $W_e^2 = q_2\,V(P_2) = \frac{q_2\,q_1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r_{12}}$

نلاحظ أن: $W_e = W_e^1 = W_e^2 = \frac{1}{2}\,(W_e^1 + W_e^2)$

- عندما نأخذ ثلاث شحن نقطية $\{q_1, q_2, q_3\}$:

$$W_e = \frac{q_1\,q_2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r_{12}} + \frac{q_1\,q_3}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r_{13}} + \frac{q_2\,q_3}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r_{23}}$$

نلاحظ أن كل زوج $\{q_i, q_j\}$ مرتبط بطاقة كامنة واحدة ولا يظهر إلا مرة واحدة في عبارة W_e.

- في حالة مجموعة مكونة من N شحنة $\{q_1, q_2, \cdots, q_N\}$ يمكن أن نكتب:

$$W_e = \sum_{i=1}^{N} q_i\,V_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i\left(\sum_{j>i}^{N}\frac{q_j}{r_{ij}}\right)$$

$$W_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}$$

أو:

$$\boldsymbol{W_e = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\,V_i}$$

المعامل $1/2$ يظهر في عبارة W_e النهائية بسبب أخذ كل زوج $q_i\,q_j$ مرتين في عملية الجمع.

الطاقة الكهربائية الكامنة لتوزيع مشكل من N شحنة نقطية هي:

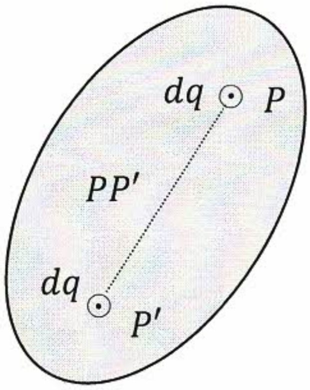
$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\,V(P_i)$$

حيث:

$$V(P_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_j}{r_{ij}}$$

$V(P_i)$ هو الكمون الكهربائي في النقطة P_i موقع الشحنة q_i الناتج عن جميع الشحن $\{q_{j\neq i}\}$.
يمكن أن نعمم العبارة السابقة على توزيع شحني مستمر.

لتكن dq الشحنة العنصرية المحيطة بنقطة كيفية P من التوزيع الشحني. الطاقة الكهربائية لهذا التوزيع هي:



$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} V(P) dq$$

حيث:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{dq(P')}{PP'}$$

$\mathcal{V}$ هو حجم التوزيع الشحني والتكامل يجب أن يتم على كل التوزيع المستمر.

الطاقة الكهربائية لناقل في حالة توازن هي إذن:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} V(P) dq = \frac{V}{2} \int_{\mathcal{V}} dq = \frac{Q\,V}{2}$$

لأن الكمون الكهربائي لناقل في حالة توازن ثابت. نستطيع أن نكتب إذن:

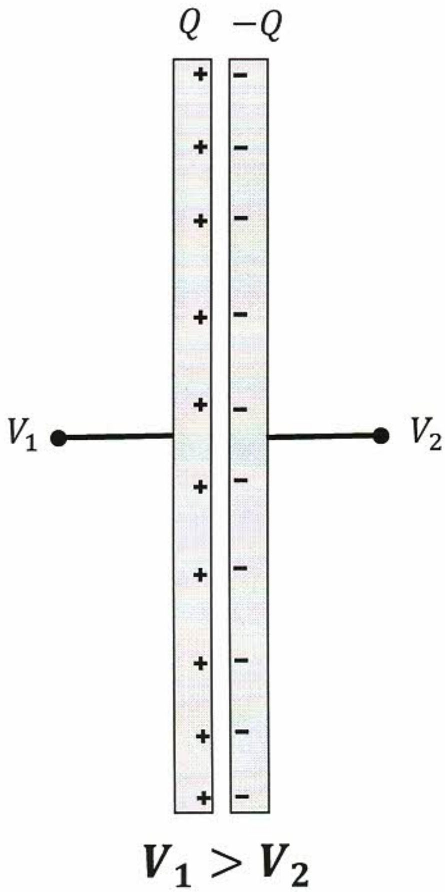
$$W_e = \frac{1}{2}\,Q\,V = \frac{1}{2}\,C\,V^2 = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C}$$

حيث C هي السعة الكهربائية للناقل و Q هي شحنة الناقل.

عندما تكون لدينا مجموعة من النواقل (A_i) في حالة التوازن (Q_i, V_i) فإن الطاقة الكهربائية الكلية هي:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\,V_i$$

في حالة مكثفة كهربائية:



$$W_e = \frac{1}{2}\,(Q_1V_1 + Q_2V_2) = \frac{1}{2}\,(Q\,V_1 - Q\,V_2)$$

$$W_e = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}Q\,V$$

إذن:

$$\boldsymbol{W_e = \frac{1}{2}Q\,V = \frac{1}{2}C\,V^2 = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C}}$$

تطبيق:

1- نشحن مكثفة كهربائية سعتها $C = 100\ \mu F$ بفرق كمون $\Delta V = 100\ V$. ما هي الشحنة Q للمكثفة ؟ ما هي طاقتها الكهربائية؟

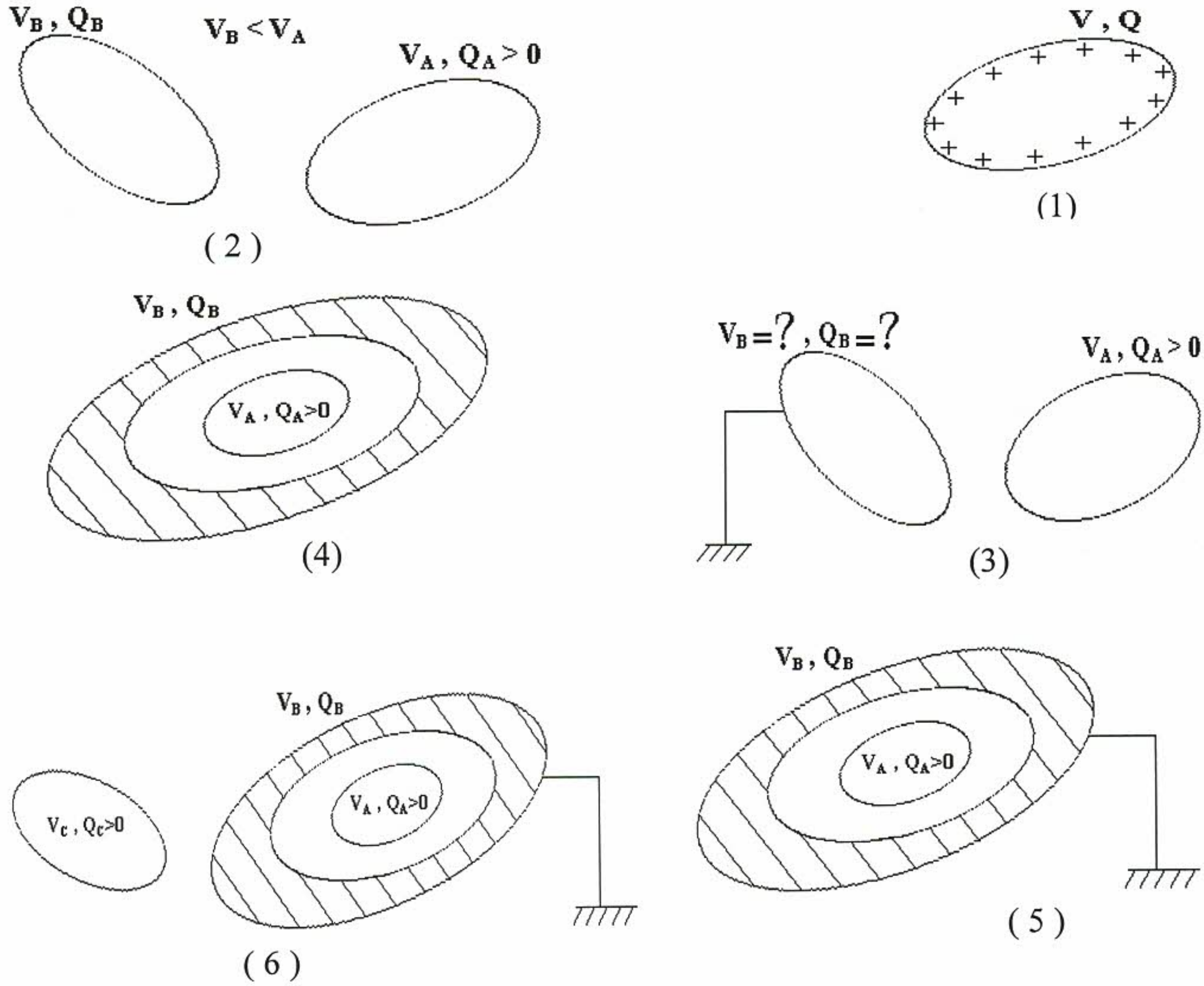
2- نربط طرفي المكثفة المشحونة سابقا بطرفي مكثفة أخرى لها نفس السعة C وفي حالة حياد. ما هي الشحنة الكهربائية الجديدة لكل مكثفة ؟ ما هو فرق الكمون بين طرفي المكثفتين ؟ ما هي الطاقة الكهربائية الكلية المخزنة في المكثفتين ؟ قارن هذه الطاقة مع الطاقة السابقة.

1- $Q = C\,V = 10^{-2}\ C$ ، $W_e = \frac{1}{2}Q\,V = 1\,J$

2- $Q' = {}^{Q}/_{2} = 5\ 10^{-3}\ C$ ، $\Delta V' = {}^{Q'}/_{C} = {}^{Q}/_{2\,C} = 50\ V$ ، $W'_e = {}^{W_e}/_{4} = 0{,}25\,J$

أعمال موجهة

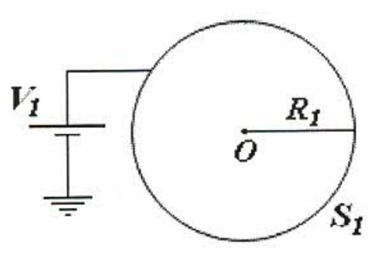
التمرين 01 : من أجل الحالات الآتية: بين نوعية التأثير الكهروساكن، و حدد نوعية الشحنات الكهربائية التي تظهر على سطحي الموصلين ، ثم مثل طبوغرافيا الحقل.



التمرين 02 :1- أذكر خواص: ناقل وحيد، مجموعة نواقل كهربائية، في حالة توازن كهرساكن.

2- نعتبر كرة معدنية ممتلئة و معزولة (S_1) نصف قطرها R_1

وضعت عند كمون كهربائي موجب V_1.

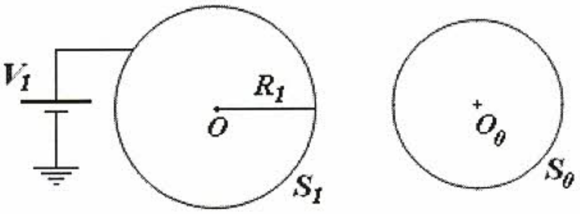


ا - أحسب عند التوازن، الشحنة الكهربائية Q_1 للكرة (S_1)،

ثم استنتج سعتها الكهربائية.

ب - أحسب الحقل الكهرساكن داخل وخارج الكرة، تأكد من

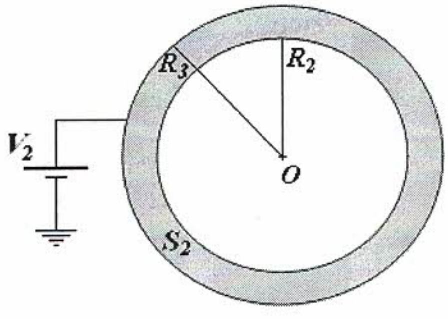
قانون كولون (قيمة الحقل بجوار الناقل).



3- نقرب كرة معدنية (S_0) محايدة من الكرة السابقة (S_1) الموضوعة عند الكمون V_1 .

ا - ماذا يحدث للكرتين؟ ما هي قيمتا Q_1 و Q_0 الجديدتين؟ أرسم خطوط الحقل حول الكرتين.

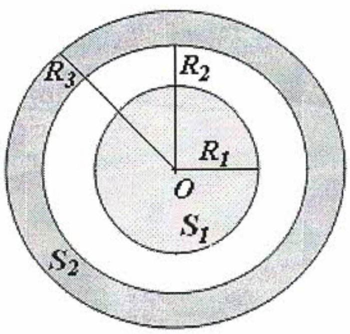
ب - نربط الكرة (S_0) بالأرض، صف ما يحدث؟ أرسم خطوط الحقل في حالة التوازن الجديدة.



4- نأخذ كرة معدنية (S_2) مجوفة نصفا قطريها: الداخلي $R_2 > R_1$ و الخارجي R_3 ، ونضعها عند الكمون الموجب V_2 .

ا - حدد شكل توزيع الشحنة الكهربائية Q_2 على الناقل (S_2) وأحسب قيمتها.

ب - أحسب الحقل الكهرساكن في مختلف مناطق الفضاء.



5- نحيط الكرة (S_1) الموجودة في حالة التوازن (V_1, Q_1) المعرف في السؤال -2- بالكرة (S_2) الموجودة عند حالة التوازن (V_2, Q_2) المعرف في السؤال -4- بحيث يكون لهما نفس المركز O.

ا - حدد، عند حصول التوازن الجديد، توزيع و قيمة الشحنات الكهربائية للناقلين (S_1) و (S_2).

ب - أحسب الحقل الكهرساكن في مختلف مناطق الفضاء.

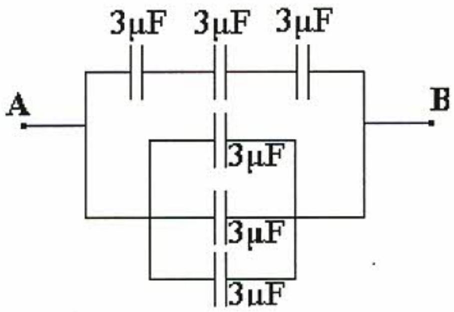
ج - أحسب فرق الكمون $\Delta V = (V_1 - V_2)$ بين الناقلين (S_1) و (S_2) واستنتج سعة المكثفة المشكلة.

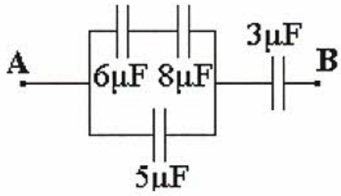
د - نربط الناقل (S_2) بالأرض، ماذا يحدث؟ كيف يصبح الحقل الكهرساكن خارج الكرة (S_2)؟ هل تتغير سعة المكثفة ؟

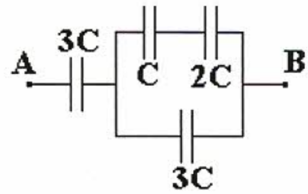
<u>التمرين 03</u> : لتكن التركيبات التالية لمجموعة المكثفات :

1- أحسب السعة الكهربائية للمكثفة المكافئة في كل حالة

2- نقوم بتطبيق فرق كمون $\Delta V = 2000V$ بين **A** و **B**، أحسب الشحنات المثبتة فوق كل مكثفة، و فرق الكمون بين طرفي كل منها.







<u>التمرين 02</u> (امتحان 2011): (10 نقاط)

نشحن كرة معدنية مجوفة (S) نصف قطرها الداخلي R_1 والخارجي R_2 بوضعها عند كمون موجب V .

1- عند بلوغ حالة التوازن، حدد شكل توزيع الشحنة Q على الناقل (S) وأحسب قيمتها ثم استنتج سعة الناقل C.

2- أحسب الحقل الكهروساكن في مختلف مناطق الفضاء.

ندخل عبر ثقب صغير في جدار الناقل (S) شحنة كهربائية نقطية سالبة $-Q_0$ ونضعها في المركز O.

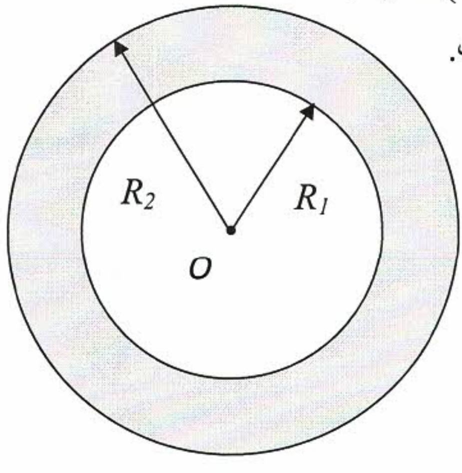
3- ما طبيعة التأثير الكهروساكن بين الناقل (S) والشحنة $-Q_0$.

4- حدد التوزيع الجديد للشحنة الكهربائية على الناقل (S).

5- أحسب الحقل الكهروساكن في مختلف مناطق الفضاء.

6- ما هو الشرط الذي يجعل الحقل الكهروساكن خارج الناقل ($r > R_2$) معدوما.

في هذه الحالة كم يساوي الكمون الكهربائي للناقل (S). علل إجابتك.



(S)